# 上机报告

谢宇晨 2000010862

## 1

### 1.1 问题描述

考虑矩形区域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ 上的 Poisson 方程，

$$-\Delta u = h, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{1.1}$$

和边值条件

$$u = f, \quad (x,y) \in \partial\Omega_0;$$
$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} = g, \quad (x,y) \in \partial\Omega_1.$$

其中 $\partial\Omega_0 = \{0\} \times [0,1], \partial\Omega_1 = \partial\Omega - \partial\Omega_0$.

**(1)** 自选合理的 $f, g, h$ 函数 ($h$ 和 $f$ 至少一个非零)，写出该问题的两个变分形式.

**(2)** 设单元直径为 $\frac{1}{3}$，做 (大小相等的) 三角形剖分，并画出草图. 设计分片一次的 $C^0$ 类有限元，并推导出有限元方程，并求解.

**(3)** 设单元直径为 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{8}$，做 (大小相等的) 三角形剖分，并在单元直径为 $\frac{1}{4}$ 时画出草图. 设计分片一次的 $C^0$ 类有限元，并编程求解，并报告程序求解时间. 将两个有限元解可视化. (例如在 MATLAB 中使用 mesh、surf 等命令)

**(4)** 求出该问题的解析解 (可能是级数的形式)，并计算 (3) 中有限元解的误差.

### 1.2 原理及算法

我们选择

$$h \equiv 1,\ f(y) = 0,\ g(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y) \in [0,1] \times \{0,1\}, \\ \pi \cos \pi y, & (x,y) \in \{1\} \times [0,1]. \end{cases}$$

取检验函数 $v \in \mathbb{V} := \left\{ v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \middle| \ v|_{\partial\Omega_0} = 0 \right\}$. 方程 (1.1) 左端乘以 $v$，在 $\Omega$ 上积分，运用 Gauss-Green 公式可得

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_0^1 \pi \cos \pi y \cdot v(1,y) dy$$

于是得到变分形式

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega v + \int_0^1 \pi \cos \pi y \cdot v(1,y) dy. \tag{1.2}$$

弱解 $u \in \mathbb{V}$，满足对任意的 $v \in \mathbb{V}$ 上述变分形式都成立.

同样地，我们基于最小势能原理提出相应的泛函极小化问题

$$J(u) = \min_{v \in \mathbb{V}} J(v),$$

其中

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega v - \int_0^1 \pi \cos \pi y \cdot v(1,y)dy.$$

知该问题也为原问题的变分形式.

考虑三角形剖分如图 1.1(单元直径为 $\frac{1}{3}$) 和图 1.2(单元直径为 $\frac{1}{4}$) 所示. 为方便起见，我们记该剖分中单元直径为 $h$，节点数为 $N$，单元数为 $M$. 则有 $N = \frac{2}{h^2} + \frac{2}{h} + 1, M = \frac{4}{h^2}$.

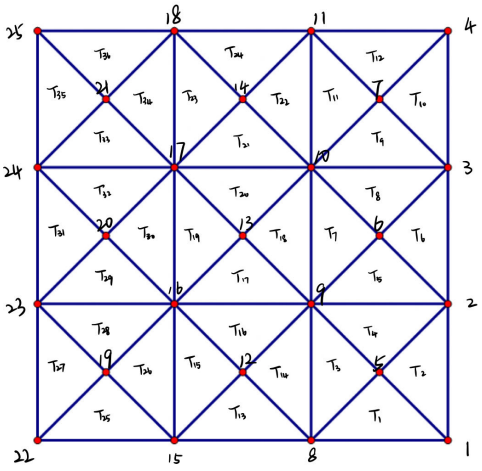


图 1.1: $diam = \frac{1}{3}$

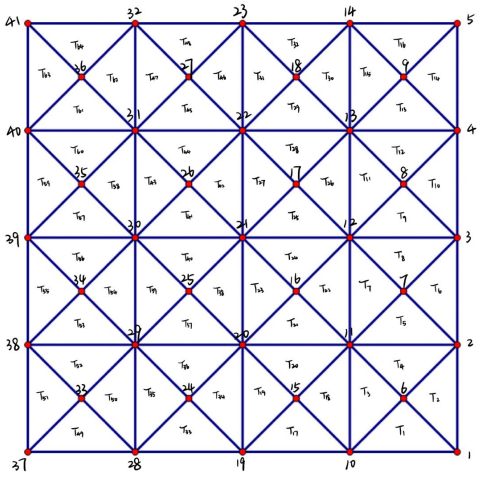


图 1.2: $diam = \frac{1}{4}$

引入有限元空间

$$\mathbb{V}_h = \{u \in C(\bar{\Omega}) : \ u|_{T_i} \in \mathbb{P}_1(T_i), \forall T_i \in \mathcal{T}_h(\Omega)\},$$

于是我们取有限元试探函数空间和检验函数空间为

$$\mathbb{V}_h(0;\Omega_0) = \{u \in \mathbb{V}_h : \ u(A_i) = 0, \forall A_i \in \partial\Omega_0\}.$$

那么对于变分形式 (1.2)，得到有限元问题

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in \mathbb{V}_h(0;\Omega_0), \text{ 使得} \\ a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h(0;\Omega_0). \end{cases} \tag{1.3}$$

其中

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v, \quad F(v) = \int_\Omega v + \int_0^1 \pi \cos \pi y \cdot v(1,y)dy.$$

设 $\varphi_i \in \mathbb{V}_h$ 满足

$$\varphi_i(A_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, N,$$

则 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 组成了 $\mathbb{V}_h$ 的一组基，而 $\{\varphi_i\}_{A_i \notin \partial\Omega_0}$ 组成了 $\mathbb{V}_h(0;\Omega_0)$ 的一组基. 令

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j, \quad v_h = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i,$$

其中 $N_h = \frac{2}{h^2} + \frac{1}{h}$. 则离散问题 (1.3) 等价于

$$\sum_{j=1}^{N_h} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = F(\varphi_i), \quad i = 1, 2, \cdots, N_h,$$

即

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{f}. \tag{1.4}$$

在计算刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和载荷向量 $\boldsymbol{f}$ 时，通过依次扫描单元来计算单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e$ 和单元载荷向量 $\boldsymbol{f}^e$，有如下算法:

**Algorithm 1** 形成刚度矩阵和载荷向量的算法

**Input:** $\boldsymbol{K} = (k(i,j)) := 0, \boldsymbol{f} = (f(i)) := 0.$

1: **for** $e = 1 : M$ **do**
2: 计算单元刚度矩阵 $\boldsymbol{K}^e = (k^e(\alpha, \beta))$;
3: 计算单元载荷矩阵 $\boldsymbol{F}^e = (f^e(\alpha))$;
4: $k(en(\alpha, e), en(\beta, e)) := k(en(\alpha, e), en(\beta, e)) + k^e(\alpha, \beta)$;
5: $f(en(\alpha, e)) = f(en(\alpha, e)) + f^e(\alpha)$;
6: **end for**

**Output:** $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{f}$.

若单元 $T_e$ 的三个顶点的坐标为 $\boldsymbol{A}_1^e = (x_1, y_1)^T, \boldsymbol{A}_2^e = (x_2, y_2)^T, \boldsymbol{A}_3^e = (x_3, y_3)^T$，有仿射变换 $\boldsymbol{x} = L_e(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{A}_e\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a}_e$ 将标准三角形 $T_s$ 映射到 $T_e$，其中

$$\boldsymbol{A}_e = (\boldsymbol{A}_2^e - \boldsymbol{A}_1^e, \boldsymbol{A}_3^e - \boldsymbol{A}_1^e), \quad \boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{A}_1^e.$$

知单元刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{1}{2\det \boldsymbol{A}_e} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

单元载荷向量为

$$\boldsymbol{f}^e = \frac{\det \boldsymbol{A}_e}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{f}_1^e,$$

其中 $\boldsymbol{f}_1^e$ 满足

$$f_1^e(j) = \begin{cases} \frac{1-\cos \pi h}{\pi h}, & j = 1, \\ 2\cos \pi(j-1)h \cdot \frac{(1-\cos \pi h)}{\pi h}, & j = 2, \cdots, \frac{1}{h}, \\ -\frac{1-\cos \pi h}{\pi h}, & j = \frac{1}{h} + 1, \\ 0, & others. \end{cases}$$

同时注意到

$$\det \boldsymbol{A}_e = 2|T_e| = \frac{h^2}{2},$$

于是我们可以计算得到刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和载荷向量 $\boldsymbol{f}$，进而求解方程 (1.4) 得到有限元解 $u_h$.

在选择的 $f, g, h$ 条件下，原问题变为

$$\begin{cases} -u_{xx} - u_{yy} = 1, & (x, y) \in \Omega, \\ u(0, y) = 0, & y \in [0, 1], \\ u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0, & x \in [0, 1], \\ u_x(1, y) = \pi \cos \pi y, & y \in [0, 1]. \end{cases} \tag{1.5}$$

下面通过分离变量法求出方程 (1.5) 的解析解.

考虑分离变量形式的非零解

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

将它代入齐次方程

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

于是

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

即

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

在上式中，左端是 $x$ 的函数，右端是 $y$ 的函数，因而只能是常数，记为 $\lambda$，从而

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, \quad y \in (0, 1).$$

将 $u(x, y)$ 代入齐次边值条件

$$u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

于是

$$X(x)Y'(0) = X(x)Y'(1) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

而 $u(x, y) \not\equiv 0$，因此 $X(x) \not\equiv 0$，从而

$$Y'(0) = Y'(1) = 0.$$

于是我们得到 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} Y''(y) + \lambda Y(y) = 0, & y \in (0, 1) \\ Y'(0) = Y'(1) = 0. \end{cases}$$

知该问题的所有特征值是

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad n = 0, 1, \cdots,$$

对应的特征函数为

$$Y_n(y) = \cos n\pi y, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

回到原问题. 将解 $u(x, y)$，非齐次项 $g(x, y)|_{\{1\}\times[0,1]}$ 都按特征函数系 $\{\cos n\pi y\}(n = 0, 1, \cdots)$ 展开:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cos n\pi y, \quad g(x, y)|_{\{1\}\times[0,1]} = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos n\pi y.$$

知 $g_0 = 0, g_1 = \pi, g_n = 0\ (n \geq 2)$.

将表达式代入原问题中，由特征函数系 $\{\cos n\pi y\}(n = 0, 1, \cdots)$ 的完备性，得到 $X_n(x)$ 满足以下常微分方程

$$\begin{cases} X_0''(x) = -1, & x \in (0,1), \\ X_0(0) = 0,\ X_0'(1) = 0. \end{cases}, \quad \begin{cases} X_1''(x) - \pi^2 X_1(x) = 0, & x \in (0,1), \\ X_1(0) = 0,\ X_1'(1) = \pi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_n''(x) - (n\pi)^2 X_n(x) = 0, & x \in (0,1), \\ X_n(0) = 0,\ X_n'(1) = 0. \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

求解得

$$X_0(x) = -\frac{x^2}{2} + x, \quad X_1(x) = \frac{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}{e^{\pi} + e^{-\pi}}, \quad X_n(x) = 0\ (n \geq 2).$$

知方程 (1.5) 的解析解为

$$u(x,y) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}{e^{\pi} + e^{-\pi}} \cos \pi y. \tag{1.6}$$

将解析解 (1.6) 限制在对应的三角形剖分网格的格点上，得到一个向量 $u$，将其和计算解 $u_h$ 作比较，通过计算 $\|u - u_h\|_\infty$ 来近似有限元解的 $\mathbb{L}^\infty$ 误差.

## 1.3 计算结果

我们将 $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ 时的解可视化，得到图 1.3 和图 1.4.

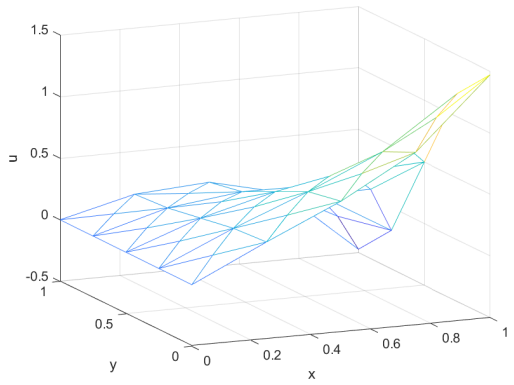



图 1.3: $h = \frac{1}{4}$

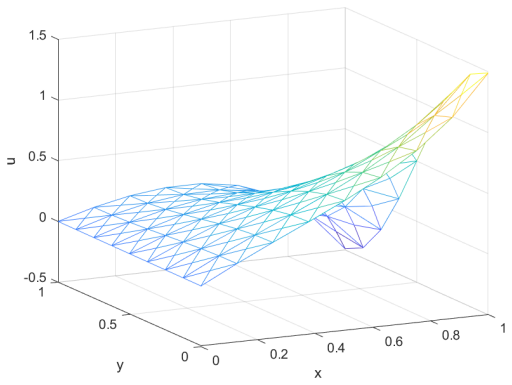



图 1.4: $h = \frac{1}{8}$

依次比较计算解的求解时间和 $\mathbb{L}^\infty$ 误差，得到下表:

| $h$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |
|---|---|---|---|
| 求解时间 (单位: s) | 0.040463 | 0.042763 | 0.042841 |
| $\mathbb{L}^\infty$ 误差 | 4.395866e-02 | 2.484861e-02 | 6.668431e-03 |

表 1.1: 不同单元直径下的结果比较

可以看出随着单元直径的减小，求解时间并没有显著变化，而 $\mathbb{L}^\infty$ 误差在减小.

# 2

## 2.1 问题描述

考虑 $L$ 型区域 $\Omega$ 上的 Poisson 方程，

$$-\Delta u = 1, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{2.1}$$

和边值条件

$$u = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega;$$

其中，$\Omega$ 为矩形 $(0,2)\times(0,2)$ 挖掉 $[1,2)\times[1,2)$ 的部分.

**(1)** 做 (大小相等的) 三角形剖分，并在单元直径为 $\frac{1}{3}$ 时画出草图. 设计分片一次的 $C^0$ 类有限元，并编程求解，将有限元解可视化.

**(2)** 把单元直径为 $\frac{1}{16}$ 时的有限元解当作参考解，将单元直径为 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ 时的有限元解与参考解比较，计算 $\mathbb{L}^2$ 误差和 $\mathbb{H}^1$ 误差，报告收敛阶.

## 2.2 原理及算法

取检验函数 $v \in \mathbb{V} := \left\{ v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \middle| \ v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$. 方程 (2.1) 左端乘以 $v$，在 $\Omega$ 上积分，运用 Gauss-Green 公式可得

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot v = \int_\Omega \nabla u \nabla v$$

于是得到变分形式

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega v. \tag{2.2}$$

弱解 $u \in \mathbb{V}$，满足对任意的 $v \in \mathbb{V}$ 上述变分形式都成立.

考虑三角形剖分如图 2.1(单元直径为 $\frac{1}{3}$) 所示. 为方便起见，我们记该剖分中单元直径为 $h$，节点数为 $N$，单元数为 $M$. 则有 $N = \frac{6}{h^2} + \frac{4}{h} + 1, M = \frac{12}{h^2}$.

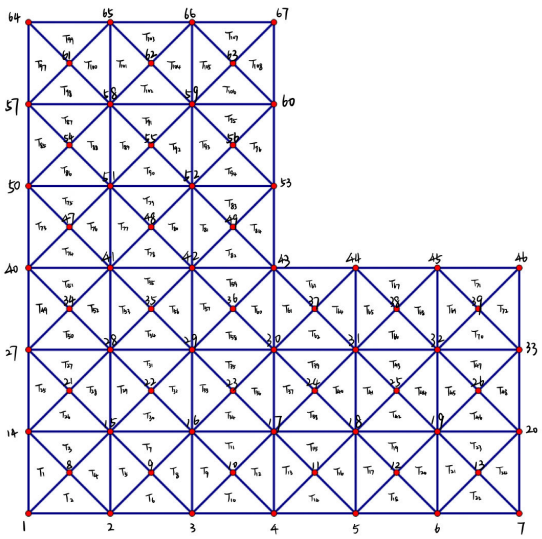


图 2.1: $diam = \frac{1}{3}$

引入有限元空间

$$\mathbb{V}_h = \{u \in C(\bar{\Omega}) : \ u|_{T_i} \in \mathbb{P}_1(T_i), \forall T_i \in \mathcal{T}_h(\Omega)\},$$

于是我们取有限元试探函数空间和检验函数空间为

$$\mathbb{V}_h(0;\Omega) = \{u \in \mathbb{V}_h : \ u(A_i) = 0, \forall A_i \in \partial\Omega\}.$$

那么对于变分形式 (2.2)，得到有限元问题

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in \mathbb{V}_h(0;\Omega), \text{ 使得} \\ a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in \mathbb{V}_h(0;\Omega). \end{cases} \tag{2.3}$$

其中

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v, \quad f(v) = \int_\Omega v.$$

设 $\varphi_i \in \mathbb{V}_h$ 满足

$$\varphi_i(A_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, N,$$

则 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 组成了 $\mathbb{V}_h$ 的一组基，而 $\{\varphi_i\}_{A_i \notin \partial\Omega_0}$ 组成了 $\mathbb{V}_h(0;\Omega_0)$ 的一组基. 令

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j, \quad v_h = \sum_{i=1}^{N_h} v_i \varphi_i,$$

其中 $N_h = \frac{6}{h^2} - \frac{4}{h} + 1$. 则离散问题 (2.3) 等价于

$$\sum_{j=1}^{N_h} a(\varphi_j, \varphi_i) u_j = f(\varphi_i), \quad i = 1, 2, \cdots, N_h,$$

即

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{f}. \tag{2.4}$$

同样地，我们通过算法 1 来计算刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和载荷向量 $\boldsymbol{f}$.

若单元 $T_e$ 的三个顶点的坐标为 $\boldsymbol{A}_1^e = (x_1, y_1)^T, \boldsymbol{A}_2^e = (x_2, y_2)^T, \boldsymbol{A}_3^e = (x_3, y_3)^T$，有仿射变换 $\boldsymbol{x} = L_e(\hat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{A}_e\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{a}_e$ 将标准三角形 $T_s$ 映射到 $T_e$，其中

$$\boldsymbol{A}_e = (\boldsymbol{A}_2^e - \boldsymbol{A}_1^e, \boldsymbol{A}_3^e - \boldsymbol{A}_1^e), \quad \boldsymbol{a}_e = \boldsymbol{A}_1^e.$$

知单元刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{1}{2\det \boldsymbol{A}_e} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

单元载荷向量为

$$\boldsymbol{f}^e = \frac{\det \boldsymbol{A}_e}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

同时注意到

$$\det \boldsymbol{A}_e = 2|T_e| = \frac{h^2}{2},$$

于是我们可以计算得到刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和载荷向量 $\boldsymbol{f}$，进而求解方程 (2.4) 得到有限元解 $u_h$.

为估计计算解与参考解的误差，我们利用计算参考解时的三角形网格. 对于计算解，由于其分片线性的性质，我们将粗网格 (计算解) 上的值提升至细网格 (参考解) 上，如图 2.2 所示.

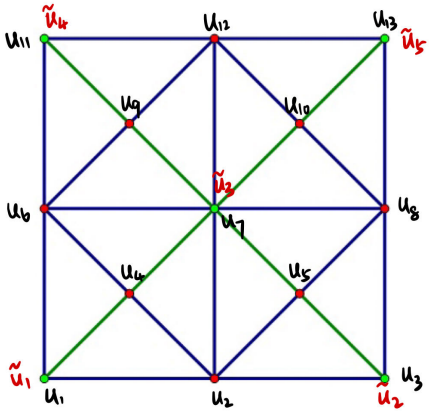



图 2.2: 提升网格

即对于粗网格上的值 $\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_5$，构造对应细网格上的值 $u_1, \cdots, u_{13}$，满足

$$\begin{cases} u_1 = \tilde{u}_1, u_3 = \tilde{u}_2, u_7 = \tilde{u}_3, u_{11} = \tilde{u}_4, u_{13} = \tilde{u}_5, \\ u_2 = \frac{\tilde{u}_1+\tilde{u}_2}{2}, u_6 = \frac{\tilde{u}_1+\tilde{u}_4}{2}, u_8 = \frac{\tilde{u}_2+\tilde{u}_5}{2}, u_{12} = \frac{\tilde{u}_4+\tilde{u}_5}{2}, \\ u_4 = \frac{\tilde{u}_1+\tilde{u}_3}{2}, u_5 = \frac{\tilde{u}_2+\tilde{u}_3}{2}, u_9 = \frac{\tilde{u}_3+\tilde{u}_4}{2}, u_{10} = \frac{\tilde{u}_3+\tilde{u}_5}{2}. \end{cases}$$

注意到

$$\|u - u_h\|^2_{\mathbb{H}^1} = \|u - u_h\|^2_{\mathbb{L}^2} + |u - u_h|^2_{\mathbb{H}^1},$$

同时有

$$\|u - u_h\|^2_{\mathbb{L}^2} = \sum_{e=1}^{M} \int_{T_e} (u - u_h)^2, \quad |u - u_h|^2_{\mathbb{H}^1} = \sum_{e=1}^{M} \int_{T_e} |\nabla(u - u_h)|^2,$$

于是我们在每个有限元单元上计算相对误差.

设在单元 $T_e$ 上

$$u - u_h = c_1\lambda_1^e(\boldsymbol{x}) + c_2\lambda_2^e(\boldsymbol{x}) + c_3\lambda_3^e(\boldsymbol{x}),$$

于是

$$\begin{aligned} \int_{T_e} (u - u_h)^2 &= \int_{T_e} (c_1\lambda_1^e + c_2\lambda_2^e + c_3\lambda_3^e)^2 d\boldsymbol{x} \\ &= \det \boldsymbol{A}_e \int_{T_s} (c_1\lambda_1^s + c_2\lambda_2^s + c_3\lambda_3^s)^2 d\hat{\boldsymbol{x}} \\ &= \det \boldsymbol{A}_e \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (c_1 + (c_2 - c_1)x + (c_3 - c_1)y)^2 dy \\ &= \det \boldsymbol{A}_e \frac{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{12} \\ &= \frac{h^2}{2} \cdot \frac{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{12} \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \int_{T_e} |\nabla(u - u_h)|^2 &= \int_{T_e} |c_1\nabla\lambda_1^e + c_2\nabla\lambda_2^e + c_3\nabla\lambda_3^e|^2 \\ &= \det \boldsymbol{A}_e \int_{T_s} |(c_1\nabla\lambda_1^s + c_2\nabla\lambda_2^s + c_3\nabla\lambda_3^s)\boldsymbol{A}_e^{-1}|^2 \end{aligned}$$

注意到

$$\boldsymbol{A}_e^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}_e} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix},$$

令

$$a^T = \det \boldsymbol{A}_e(c_1\nabla\lambda_1^s + c_2\nabla\lambda_2^s + c_3\nabla\lambda_3^s)\boldsymbol{A}_e^{-1} = \begin{pmatrix} (c_2-c_1)y_3 + (c_3-c_2)y_1 + (c_1-c_3)y_2 \\ (c_2-c_3)x_1 + (c_3-c_1)x_2 + (c_1-c_2)x_3 \end{pmatrix},$$

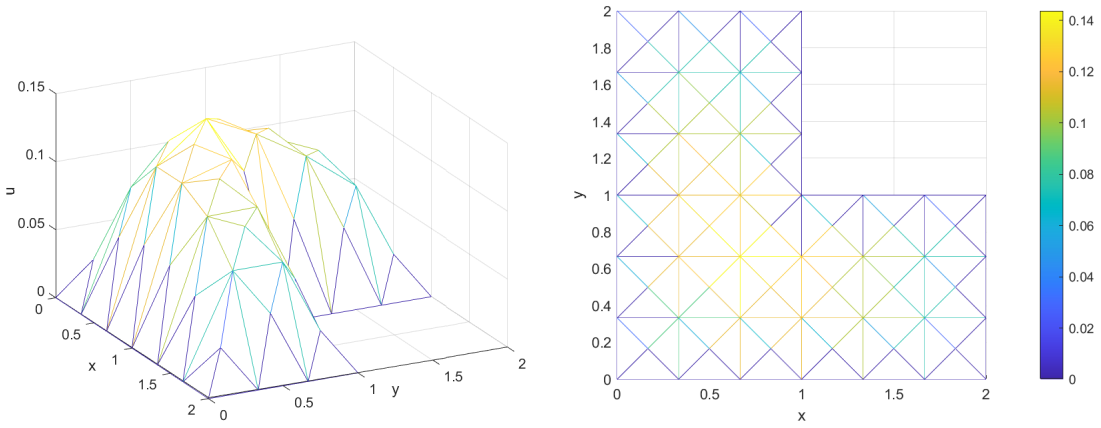
则有

$$\int_{T_e} |\nabla(u-u_h)|^2 = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}_e}\int_{T_s} a^T a = \frac{a^T a}{h^2}. \tag{2.6}$$

利用式 (2.5) 和式 (2.6) 即可计算出 $\mathbb{L}^2$ 误差和 $\mathbb{H}^1$ 误差.

## 2.3 计算结果

我们将 $h = \frac{1}{3}$ 时的解可视化，得到图 2.3.




(a) (b)

图 2.3: $h = \frac{1}{3}$

将单元直径为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ 时的有限元解与单元直径为 $\frac{1}{16}$ 时的参考解比较，分别计算其 $\mathbb{L}^2$ 误差和 $\mathbb{H}^1$ 误差，以 $\ln h$ 和 $\ln e$ 为坐标轴，得到图 2.4.

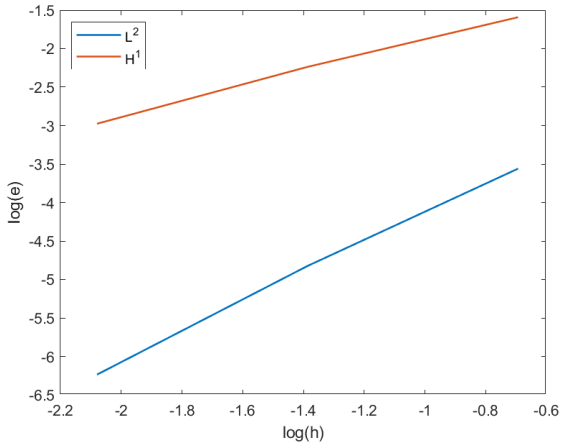



图 2.4: $\mathbb{L}^2$ 误差和 $\mathbb{H}^1$ 误差收敛阶

计算两条线斜率得

$$k_1 = 1.931002, \quad k_2 = 0.998361,$$

即为 $\mathbb{L}^2$ 误差和 $\mathbb{H}^1$ 误差近似收敛阶.