1. (1) 取空间步长 Δx, Δy 将 $[0,1]\times[0,1]$ 分成若干网格节点 $(x_i, y_j)=(i\Delta x, j\Delta y)$

记 网格函数 U_{ij} 表示 U 在 (x_i, y_j) 处取值. 则 五点差分格式为

$$\begin{cases} -L_h U_{ij} \triangleq -\left(\dfrac{U_{i+1,j}-2U_{ij}+U_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\dfrac{U_{i,j+1}-2U_{ij}+U_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right)+U_{ij}=f_{ij} \\ \qquad\qquad \forall (x_i,y_j)\in \mathring{\Omega} \\ U_{ij}=0 \qquad \forall (x_i,y_j)\in \partial\Omega \end{cases}$$

★ 截断误差: 将真解 u 代入上述格式 可得

$$T_{ij}=-\left(\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right)+u_{ij}-f_{ij}$$

$$=-\frac{1}{12}\left[\partial_x^4 u(\Delta x)^2+\partial_y^4 u(\Delta y)^2\right]+O\left((\Delta x)^4+(\Delta y)^4\right)$$

$\forall (x_i,y_j)\in\Omega$.

$T_{ij}=0 \qquad \forall (x_i,y_j)\in\partial\Omega$.

(2) L^∞ 意义下的稳定性: 给定合适的 f. 记 J_D 为边界节点集, J_0 为内部节点集.

$$\max_{i\in J}|U_{ij}| \le C\left(\max_{i\in J_0}|f_{ij}|\right)$$

pf: 由格式可知 最大值原理成立: ($L_h U\ge 0 \Rightarrow \max_{i\in J} U_i \le \max\{\max_{i\in J_0} U_i, 0\}$)

取网格函数 $\Phi(x,y)=(x^2+y^2)\ge 0$, $\max_{(x,y)\in\Omega}|\Phi|\le 2$

$$L_h\Phi_{ij}=2+2-\Phi_{ij}\ge 2$$

则 构造比较函数 $\Psi_{ij}^{\pm}=\pm U_{ij}+\frac{1}{2}\max|f_{ij}|\,\Phi_{ij}$

则 $L_h\Psi_{ij}^{\pm}=\pm f_{ij}+\frac{1}{2}\max|f_{ij}|\cdot L_h\Phi_{ij}\ge 0$

由最大值原理

$$\max_{ij} \pm U_{ij} \le \max_{(ij)\in J_\Omega} \Psi_{ij}^{\pm} \le \max\left\{ \max_{(ij)\in J_D} \Psi_{ij}^{\pm},\ 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \max_{(ij)} |f_{ij}| \cdot \max_{(ij)\in J_D} \Phi_{ij}$$

$$\le \frac{1}{2} \max |f_{ij}|$$

$$\therefore \max_{(ij)\in J_D} |U_{ij}| \le \frac{1}{2} \max_{(ij)\in J_\Omega} |f_{ij}| \quad \square$$

收敛性：设误差为 e 则误差方程为

$$\begin{cases} -(L_h e)_{ij} = T_{ij} & (ij) \in J_\Omega \\ e_{ij} = 0 & (ij) \in J_D \end{cases}$$

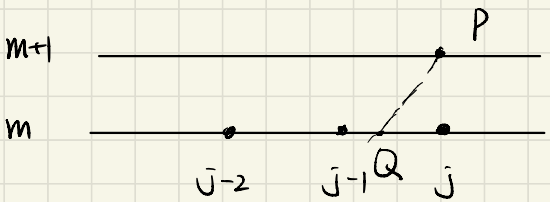
由 L^∞ 稳定性

$$\max_{(ij)\in J_\Omega} |e_{ij}| \le \frac{1}{2} \max_{(ij)\in J_\Omega} |T_{ij}|$$

$$\le \frac{1}{24} \left(M_x (\Delta x)^2 + M_y (\Delta y)^2 \right)$$

其中 $M_x = \sup |\partial_x^4 u|$ $M_y = \sup |\partial_y^4 u|$ $\square$

2. (1) 若 $a>0$ 为常数.



设网格时间步长为 τ.
空间步长为 h.，分为 $0,\cdots N$ 个网格点
$\gamma = \frac{a\tau}{h}$

P 处函数值，由特征线法应由 Q 处的函数值确定

Q 坐标 $(x_j - a\tau, t_m)$

(法一) 利用 (x_j, t_m) (x_{j-1}, t_m) (x_{j-2}, t_m) 三个节点值二次插值近似 Q 处函数

$$u_j^{m+1} = \frac{1}{2}(1-\nu)(2-\nu)\,u_j^m + \nu(2-\nu)\,u_{j-1}^m - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)\,u_{j-2}^m$$

(法二) 将所构造的局部截断误差纳入格式

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} + a\,\frac{u_j^m - u_{j-1}^m}{h} = -\frac{1}{2}ah(1-\nu)(u_{xx})_j^m + O(h^2)$$

用在 (x_{j-1}, t_m) 处二阶中心差分代替二阶导数

可得 Beam-Warming 格式

稳定性分析：$u_j^m = \lambda_k^m e^{ikjh}$ 代入格式

$$\lambda_k = 1 - \nu + \nu e^{-ikh} - \frac{1}{2}\nu(1-\nu)e^{-ikh}(e^{ikh} - 2 + e^{-ikh})$$

$$= e^{-ikh}\left[1 - 2(1-\nu)^2 \sin^2\frac{1}{2}kh + i(1-\nu)\sin kh\right]$$

$$\therefore |\lambda_k|^2 = 1 - 4(1-\nu)^2\left(1 - (1-\nu)^2\right)\sin^4\frac{kh}{2}$$

$$= 1 - 4\nu(2-\nu)(1-\nu)^2\sin^4\frac{kh}{2}$$

当 $0 \le \nu \le 2$ 时 $|\lambda_k| \le 1$. ☑

(2) $a(x) > 0$ Lipschitz 即 $|a(x) - a(y)| \le C|x-y|$

$\max_{x\in I}|a(x)| \le A$.

考虑一阶迎风格式

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\tau} + \frac{a_j(u_j^m - u_{j-1}^m)}{h} = 0.$$

$$U_j^{m+1} = U_j^m - \frac{a_j \tau}{h}(U_j^m - U_{j-1}^m)$$

令 $L_h = -a(x) h^{-1} \Delta_{-x}$ 则 $U^{m+1} = U^m + \tau L_h U^m$.

$$\langle L_h U, U\rangle = -\sum_{j=1}^{N-1} a_j (U_j - U_{j-1}) U_j = -\sum_{j=1}^{N-1} a_j U_j^2 + \sum_{j=1}^{N-1} a_j U_j U_{j-1}$$

$$h \|L_h U\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N-1} a_j^2 (U_j - U_{j-1})^2$$

$$\le A \sum_{j=1}^{N-1} [a_j U_j^2 - 2 a_j U_j U_{j-1} + a_j (U_{j-1})^2]$$

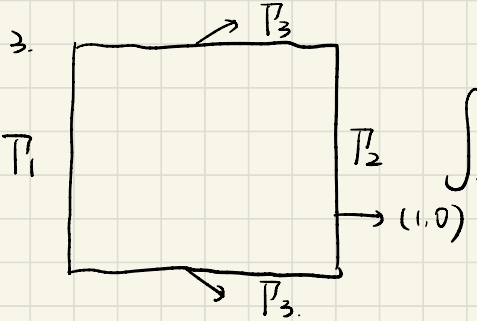
由此得

$$2\langle L_h U, U\rangle + A^{-1} h \|L_h U\|_2^2 \le \sum_{j=1}^{N-1} a_j [(U_j)^2 - (U_{j-1})^2]$$

$$= -a_{N-1} (U_{N-1})^2 - \sum_{j=1}^{N-2} (a_j - a_{j+1}) U_j^2 \le C \|U\|_2^2$$

即 L_h 是强制的，当 $A\tau \le h$ 时 格式 L^2 稳定的

3.



同样试探函数 $v(x) \in V_0 = \{v \in H^1, v|_{\Gamma_1} = 0\}$

$$\int_\Omega a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx - \int_{\partial\Omega} a(x) \frac{\partial u}{\partial n} \cdot v(x)\, ds$$

$$= \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

注意 在 Γ_3 上 $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_2}(-\frac{\partial u}{\partial x_2}) = 0$.

在 Γ_2 上 $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_1} = -u(x)$.

令 $v(x)|_{\Gamma_1} = 0$ 则有 变分形式

$$\int_\Omega a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\Gamma_2} a(x) u(x) v(x)\, ds = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx$$

$\forall v \in V_0$

弱解：记 $V_{u_0}=\{u\in H^1(\Omega):\ u|_{\Gamma_1}=u_0\}$

$V_0=\{u\in H^1(\Omega):\ u|_{\Gamma_1}=0\}$

若 $u\in V_{u_0}$ 满足

$$\int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,dx+\int_{\Gamma_2}a(x)u(x)v(x)\,ds=\int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

$\forall\ v\in V_0$

则称 u 为该问题的弱解.

(2) 若 $f\in C(\bar\Omega)$，$u_0\in C(\partial\Omega)$，$a(x)\in C^1(\bar\Omega)$，$u\in C^2(\bar\Omega)$

pf: 取 $v\in C_0^\infty(\Omega)$ 由 Green 公式

$$\int_\Omega -\nabla\cdot(a(x)\nabla u(x))\,v(x)\,dx=\int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

由条件 $-\nabla\cdot(a(x)\nabla u(x))-f(x)$ 是连续函数

$\therefore$ u 满足方程 $-\nabla\cdot(a(x)\nabla u(x))=f\quad\forall x\in\Omega$

再由迹的定义 u 在 Γ_1 上为 u_0. 即 $u|_{\Gamma_1}=u_0$

再取 $v\in C^\infty(\bar\Omega)$ 由 Green 公式可得

$$\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}+u\right)v\,ds+\int_{\Gamma_3}\frac{\partial u}{\partial n}v\,ds=0\quad\forall\ v\in C^\infty(\bar\Omega)$$

由 v 的任意性可知

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial n}+u=0 & \text{on }\Gamma_2\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0 & \text{on }\Gamma_3\end{cases}$$

综上 u 为原问题古典解

(3). 记 $a(u,v) = \int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_{\Gamma_2} a(x)\,u\,v\,ds$.

若 $a(u,u) \geq C\|u\|_{H^1}^2$

则 $a(u,v) = \int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_{\Gamma_2} a(x)\,u\,v\,ds$

$\leq \left(\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla u\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega a(x)\nabla v\cdot\nabla v\,dx\right)^{\frac12}$

$+\left(\int_{\Gamma_2} a(x)u^2\,ds\right)^{\frac12}\left(\int_{\Gamma_2} a(x)v^2\,ds\right)^{\frac12}$

$\leq B|u|_{H^1}|v|_{H^1} + CB\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}$

$\in C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1(\Omega)}$

$\therefore$ 双线性型有界.

设 $u_0 \in H^1(\Omega)$ 满足 $u_0|_{\Gamma_1} = u_0$

则 考虑 $a(u,v) = (f,v) - a(u_0,v)$

由 Lax-Milgram 引理. 可知 解 存在唯一. ☑

4. $\frac{d}{dt}E_h(t) = \sum_{j=1}^{N} h\,\frac{d}{dt}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m}\rho_{ij}(t)(\log\rho_{ij}(t)-1) + \frac12\Big(f_j + \sum_{i=1}^{m} z_i\rho_{ij}(t)\Big)\phi_j(t) + \sum_{i=1}^{m}\rho_{ij}(t)M_{ij}\Big]$

导数项: $\sum_{i=1}^{m}\dot\rho_{ij}(t)(\log\rho_{ij}(t)-1) + \rho_{ij}(t)\frac{1}{\rho_{ij}(t)}\dot\rho_{ij}(t) + \frac12\Big(f_j + \sum z_i\rho_{ij}(t)\Big)\dot\phi_j(t) + \frac12\Big(\sum z_j\dot\rho_{ij}(t)\Big)\phi_j(t)$

$S_j(t)$

$$+\sum_{i=1}^{m}\dot{\rho}_{ij}(t)\left(\psi_{ij}(t)-z_i\phi_j(t)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\log\rho_{ij}(t)+\psi_{ij}(t)\right)\dot{\rho}_{ij}(t)+\frac{1}{2}S_j(t)\dot{\phi}_j(t)-\frac{1}{2}\dot{S}_j(t)\phi_j(t)$$

对 j 求和 $\times h$ 后

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}h\left(\log\rho_{ij}(t)+\psi_{ij}(t)\right)\dot{\rho}_{ij}(t)\qquad\left(\dot{\rho}_{ij}(t)=\frac{C_{ij+\frac{1}{2}}-C_{ij-\frac{1}{2}}}{h}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}h\cdot\underbrace{\left(\log\rho_{ij}(t)+\psi_{ij}(t)\right)}_{\psi^*_{ij}}\left(\frac{C_{ij+\frac{1}{2}}-C_{ij-\frac{1}{2}}}{h}\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N-1}\left(\psi^*_{ij+1}(t)-\psi^*_{ij}(t)\right)C_{ij+\frac{1}{2}}(t)$$

代入 $C_{ij+\frac{1}{2}}$ 表达式

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N-1}\frac{e^{-\psi_{ij+\frac{1}{2}}}}{h}\left(\psi^*_{ij+1}-\psi^*_{ij}(t)\right)\left(e^{\psi^*_{ij+1}}-e^{\psi^*_{ij}}\right)$$

$$\leq 0.$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}h\left[S_j\dot{\phi}_j(t)-\dot{S}_j(t)\phi_j(t)\right]$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}hS_j(t)\frac{d}{dt}\phi_j(t)=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{h}{h}\left(\Phi_{j+\frac{1}{2}}-\Phi_{j-\frac{1}{2}}\right)\dot{\phi}_j(t)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\Phi_{j+\frac{1}{2}}(t)\frac{d}{dt}\left(\phi_{j+1}(t)-\phi_j(t)\right)-\Phi_{N+\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\phi_N+\Phi_{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\phi_1$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\Phi_{j+\frac{1}{2}}(t)\frac{d}{dt}\Phi_{j+\frac{1}{2}}(t)-\Phi_{N+\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\phi_N+\Phi_{\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}\phi_1$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\left(\phi_{j+1}-\phi_j\right)\frac{d}{dt}\Phi_{j+\frac{1}{2}}(t)-\phi_N\frac{d}{dt}\Phi_{N+\frac{1}{2}}+\phi_1\frac{d}{dt}\Phi_{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\phi_j(t)\frac{d}{dt}\left(\Phi_{j+\frac{1}{2}}-\Phi_{j-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}h\phi_j(t)\frac{d}{dt}S_j(t).$$

$\therefore$ $\sim = 0$. $\frac{d}{dt} E_h(t) \leq 0$ ☑