第二次作业参考答案

韩如冰*

1. 1.9: 若 $-L_hU_{\mathbf{j}} = f_{\mathbf{j}} \geq 0$, 并且 $\min\limits_{\mathbf{i}\in J_D} U_{\mathbf{i}} = \min\limits_{\mathbf{i}\in J_D} g_{\mathbf{j}} \geq 0$, 则由推论 1.1 可得 $\min\limits_{\mathbf{i}\in J_\Omega} U_{\mathbf{i}} \geq 0$, 即 $U_{\mathbf{j}} \geq 0$ ($\forall \mathbf{j} \in J$). 反之同理由定理 1.2 可得。

2. 1.10: 对 $V_{\mathbf{j}} - U_{\mathbf{j}}$, 由题目条件可得

$$L_h(V_{\mathbf{j}} - U_{\mathbf{j}}) \leq 0,\ \forall \mathbf{j} \in J_\Omega \quad V_{\mathbf{j}} - U_{\mathbf{j}} \geq 0,\ \forall \mathbf{j} \in J_D.$$

   则由 1.9 题的结论可得 $V_{\mathbf{j}} - U_{\mathbf{j}} \geq 0$, $\forall j \in J$. 对 $V_{\mathbf{j}} + U_{\mathbf{j}}$ 可得类似的结论.

3. 已知误差主项为 $O(h^2)$, 则可设为 (1.5.12) 式的样子

$$U_{h,\mathbf{j}} = u_{\mathbf{j}} + C_{\mathbf{j}}h^2 + o(h^2)$$

   则有

$$U_{h,\mathbf{j}} - U_{h/2,\mathbf{j}} = \frac{3}{4}C_j h^2 + o(h^2).$$

   因此

$$U_{h/2,\mathbf{j}} = u_{\mathbf{j}} + \frac{1}{4}C_{\mathbf{j}}h^2 + o(h^2) = \frac{1}{3}(U_{h,\mathbf{j}} - U_{h/2,\mathbf{j}}) + o(h^2).$$

4. 由 (2.2.26) 式可知差分方程满足

$$U_j^{m+1} = (1-2\mu)U_j^m + \mu(U_{j-1}^m + U_{j+1}^m),$$

   令

$$L_{h,\tau} = \frac{\delta_x^2}{(\Delta x)^2} - \frac{\Delta_{+t}}{\Delta t}$$

   取 J_Ω 为 $\Omega_{t\max}$ 中的格点, $J_D = \{(x,t) \in J_\Omega |\ x = 0, 1$ 或$t = 0\}$, 则可以验证定理 1.2 中的 (1)(2) 成立。

5. 注意到 $L_{h,\tau}$ 的定义

$$L_{h,\tau}(\pm e - \Phi)_j^m = \pm T_j^m + \|T\|_{\infty,\Omega_{t\max}} \geq 0$$
$$L_{h,\tau}(\pm e - \Psi)_j^m = \pm T_j^m + \|T\|_{\infty,\Omega_{t\max}} \geq 0$$

   选取比较函数 $\Phi + C$, 其中 $C = \max\limits_{0\leq i\leq N} |e_i^0| + \max\max\{|e_0^l|, |e_N^l|\}$, 则

$$L_{h,\tau}(\pm e - \Phi - C) = L_{h,\tau}(\pm e - \Phi) \geq 0$$

*School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China

并且在边界 J_D 上

$$\pm e - \Phi - C \leq 0$$

由比较定理

$$|e_j^m| \leq C + t_m \|T\|_{\infty,\Omega_{t\max}}$$

类似可得对于 $\Psi + C$ 的结果.

6. 考虑

$$\begin{aligned} L_{h,\tau}(e-\Psi)_j^m &= T_j^m - (-2A(1-\alpha\tau)^m + \alpha A(1-\alpha\tau)^m x_j(1-x_j)) \\ &= T_j^m + A(1-\alpha\tau)^m(2-\alpha x_j(1-x_j)) \\ &\geq (\pm C + A(2-\alpha x_j(1-x_j)))(1-\alpha\tau)^m \end{aligned}$$

当题目条件满足时有 $(2-\alpha x_j(1-x_j)) > 0$. 取 $A \geq \frac{C}{(2-\alpha x_j(1-x_j))}$

$$L_{h,\tau}(e-\Psi)_j^m \geq 0$$

而在 J_D 上 $e = 0$，则在 J_D 上 $e - \Psi \leq 0$. 则由比较定理可得

$$(e-\Psi)_j^m \leq 0$$

所以

$$e_j^{m+1} \leq \Psi_j^{m+1} = A(1-\alpha\tau)^{m+1} x_j(1-x_j)$$

取

$$K \geq (1-\alpha\tau)C/(2-\alpha x_j(1-x_j)) \quad \forall x_j$$

即取

$$K \geq (1-\alpha\tau)C/(2-\alpha/4)$$

即可。