第四次作业参考答案

韩如冰*

- 习题三 T3. 特征线方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - \frac{1}{2}$. 解得 $x(t) = (x_0 - \frac{1}{2})e^t + \frac{1}{2}$.

  当 J 为奇数时: 迎风格式

$$U_j^{m+1} = \begin{cases} (1+\nu_j^m)U_j^m - \nu_j^m U_{j+1}^m, & 0 \le j \le \dfrac{J-1}{2} \\ (1-\nu_j^m)U_j^m + \nu_j^m U_{j+1}^m, & \dfrac{J+1}{2} \le j \le J. \end{cases}$$

  其中 $\nu_j^m = \frac{a_j^m \tau}{h} \in [-1, 1]$, 即 $\frac{\tau}{h} \le 2$.

  类似书上 3.2 节的分析，考虑截断误差 $T_j^m = \frac{1}{2}(\tau u_{tt} + a_j^m h u_{xx})_j^m + O(\tau^2 + h^2) = O(h + \tau)$. 则由最大值原理

$$\max_j |e_j^{m+1}| \le \max_j |e_j^0| + t_{\max} \max_{j,m} |T_j^m|, \ \forall (m+1)\tau \le t_{\max}.$$

  当 J 为偶数时: 迎风格式

$$U_j^{m+1} = \begin{cases} (1+\nu_j^m)U_j^m - \nu_j^m U_{j+1}^m, & 0 \le j \le \dfrac{J}{2} - 1 \\ U_j^m, \quad j = \dfrac{J}{2}, & \\ (1-\nu_j^m)U_j^m + \nu_j^m U_{j+1}^m, & \dfrac{J}{2} + 1 \le j \le J. \end{cases}$$

  截断误差类似，只需要注意到 $T_{J/2}^m = 0$, 基于最大值原理的误差估计也是类似的. 对于给定初值 $u_0(x) = x(1-x)$, 利用 $u(x(t), t) = u(x_0, 0)$, 点 (x, t) 在曲线 $x(t) = (x_0 - \frac{1}{2})e^t + \frac{1}{2}$ 上, 可得 $x_0 = \frac{1}{2} + (x - \frac{1}{2})e^{-t}$, 则 $u(x,t) = x_0(1-x_0) = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 e^{-2t}$. 根据表达式可以画出简图.

  对于 $a(x) = 1/2 - x$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1/2 - x$, 解得 $x(t) = (x_0 - \frac{1}{2})e^{-t} + \frac{1}{2}$ 类似的给出迎风格式，同之前一样，注意区分 x_m 与 $1/2$ 的大小关系，注意风向即可。在给定边值条件之后，注意到 $u(x(t), t) = u(x_0, 0)$ 需要满足 $x_0 = \frac{1}{2} + (x - \frac{1}{2})e^t \in [0, 1]$, 即 $t < -\ln(|2x - 1|)$. 否则，从 (x, t) 出发的特征线会碰到边界，从而 $u(x, t) = 0$. 综上

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} - e^{2t}(x - \dfrac{1}{2})^2, & t < -\ln(|2x-1|), \\ 0, \quad \text{其他情况}. \end{cases}$$

- 习题三 T6: 应用 3.2.3 节的方法，得到 Beam-Warming 格式

$$U_j^{m+1} = \frac{1}{2}(1+\nu)(2+\nu)U_j^m - \nu(2+\nu)U_{j+1}^m + \frac{1}{2}\nu(1+\nu)U_{j+2}^m.$$

*School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China

做 Fourier 分析可得方程

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{1}{2}(1+\nu)(2+\nu) - \nu(2+\nu)e^{ikh} + \frac{1}{2}\nu(1+\nu)e^{i2kh} \\ &= e^{ikh}\left(\frac{1}{2}(1+\nu)(2+\nu)e^{-ikh} - \nu(2+\nu) + \frac{1}{2}\nu(1+\nu)e^{ikh}\right) \\ &= e^{ikh}(1 - 2(1+\nu)^2\sin^2\frac{1}{2}kh - i(1+\nu)\sin kh).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|\lambda_k|^2 &= (1 - 2(1+\nu)^2\sin^2\frac{1}{2}kh)^2 + 4(1+\nu)^2\sin^2\frac{1}{2}kh\cos^2\frac{1}{2}kh \\ &= 1 + 4(1+\nu)^2\nu(\nu+2)\sin^4\frac{1}{2}kh.\end{aligned}$$

稳定性条件 $-2 \le \nu \le 0$.

- 习题三 T8: 令 $U = (\rho, w)'$, 则方程可以写为

$$U_t + AU_x = 0, \quad A = \begin{bmatrix} q & 1 \\ a^2 & q \end{bmatrix}$$

按照题目要求的显示格式:

$$U_j^{m+1} = U_j^m - \frac{1}{2}\nu A(U_{j+1}^m - U_{j-1}^m), \quad \nu = \frac{\tau}{h}.$$

带入 Fourier 波型

$$U_j^m = \lambda_k \begin{bmatrix} \rho \\ w \end{bmatrix} e^{ikjh}$$

可得特征方程

$$\lambda_k \begin{bmatrix} \rho \\ w \end{bmatrix} = (I - i\nu\sin khA) \begin{bmatrix} \rho \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - iq\nu\sin kh & -i\nu\sin kh \\ -ia^2\nu\sin kh & 1 - iq\nu\sin kh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ w \end{bmatrix}$$

由此可得

$$\lambda_k^{\pm} = 1 - iq\nu\sin kh \pm ia\nu\sin kh.$$

不难看出 $\max\{|\lambda_k^{\pm}|\} > 1$ 恒成立. 因此格式不稳定. 截断误差略, 类似 3.5.4 节可给出 L-W 格式:

$$U_j^{m+1} = U_j^m - \frac{1}{2}\nu A(U_{j+1}^m - U_{j-1}^m) + \frac{1}{2}\nu^2A^2(U_{j+1}^m - 2U_j^m + U_{j-1}^m)$$

可得特征方程

$$\begin{aligned}\lambda_k \begin{bmatrix} \rho \\ w \end{bmatrix} &= (I - i\nu\sin khA - 2\nu^2\sin^2\frac{1}{2}khA^2) \begin{bmatrix} \rho \\ w \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - iq\nu\sin kh - 2\nu^2\sin^2\frac{1}{2}kh(a^2+q^2) & -i\nu\sin kh - 4\nu^2\sin^2\frac{1}{2}khq \\ -ia^2\nu\sin kh - 4\nu^2\sin^2\frac{1}{2}kha^2q & 1 - iq\nu\sin kh - 2\nu^2\sin^2\frac{1}{2}kh(a^2+q^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ w \end{bmatrix}\end{aligned}$$

由此可得

$$\lambda_k^{\pm} = 1 - iq\nu\sin kh \pm ia\nu\sin kh - 2\nu^2\sin^2\frac{1}{2}kh(a^2+q^2) \pm a(i\nu\sin kh - 4\nu^2\sin^2\frac{1}{2}khq)$$

令 $|\lambda_k^{\pm}| \le 1$ 可得 $\nu \le \frac{1}{q+a}$.

- 习题三 T14:

$$\begin{aligned}\langle V,\Delta_{+x}W\rangle_2+\langle W,\Delta_{-x}V\rangle_2&=h\sum_{j=1}^{N-1}V_jW_{j+1}-h\sum_{j=1}^{N-1}V_jW_j+h\sum_{j=1}^{N-1}V_jW_j-h\sum_{j=1}^{N-1}V_{j-1}W_j\\&=h(V_{N-1}W_N-V_0W_1);\\\langle V,\Delta_{0x}W\rangle_2+\langle W,\Delta_{0x}V\rangle_2&=\frac{1}{2}\left(h\sum_{j=1}^{N-1}V_jW_{j+1}-h\sum_{j=1}^{N-1}V_jW_{j-1}+h\sum_{j=1}^{N-1}V_{j+1}W_j-h\sum_{j=1}^{N-1}V_{j-1}W_j\right)\\&=\frac{h}{2}\left(V_{N-1}W_N-V_0W_1+V_NW_{N-1}-V_1W_0\right)\end{aligned}$$

- 习题四 T2：由差分格式的一致可解性 (4.1.4) 可知 $\|B_1^{-1}\|\le K\tau$. 不妨设 $|\alpha(x)|\le M$. 则 $\|\frac{1}{\tau}B_1^{-1}A\|\le KM$

$$U^{m+1}=[B_1^{-1}B_0+\tau\frac{1}{\tau}B_1^{-1}A]U^m$$

由定理 4.2 可知格式仍是稳定的. 由该结论，只要离散扩散方程的 L^2 稳定性条件 $0\le\nu\le1/2$ 被满足，可知反应扩散方程也具有 L^2 稳定性.

- 习题四 T3: 显然内部满足 $U_j^{m+1}=(1-2\mu)U_j^m+\mu(U_{j-1}^m+U_{j+1}^m)$. 对于左边界，由中心差分得 $U_1^m=U_{-1}^m$, 因此 $U_0^{m+1}=(1-2\mu)U_0^m+2\mu U_1^m$. 而右边界 $\frac{U_{N+1}-U_{N-1}}{2\Delta x}+U_N=0$, 带入得 $U_N^{m+1}=(1-2\mu-2\mu\Delta x)U_N^m+2\mu U_{N-1}^m$.

  对于满足 $h\cot k=\sin kh$ 的 k 以及 $\lambda_k=1-4\mu\sin^2\frac{1}{2}kh$. 将 V_j^m 表达式带入格式验证可得结论.

  画出 $\cot k$ 与 $\sin kh$ 的图像，可以发现在 $[0,\pi/h]$ 的区间上有 N 个根，其他长度为 π/h 的区间内也会有 N 个根，但只会给出 N 个不同的 V_j^n.

  当 h 很小时, $kh=\pi+iyh$，则 $h=N\pi+iy$, $h\cot k=h\cot(\pi+iyh)=h\cot iyh=h\frac{\cosh yh}{i\sinh yh}=-ih\coth yh=-ihy\approx-i\sinh hy=-\sin(iyh)=\sin(\pi+iyh)=\sin kh$. 此时 $\lambda_k=1-4\mu\sin^2\frac{1}{2}kh=1-4\mu\sin^2\frac{1}{2}(\pi/2+iyh/2)=1-4\mu\cos^2(iyh/2)=1-4\mu\cosh^2\frac{1}{2}yh$. 当 $\mu=1/2$ 时，$\lambda_k<-1$，因此显式格式将导致误差增长.

- 习题四 T11:

$$\begin{aligned}S^{m+1}-S^m&=\|U^{m+1}\|_2^2-\|U^{m-1}\|_2^2+2\nu\langle U^{m+1},\Delta_{0x}U^m\rangle_2-2\nu\langle U^m,\Delta_{0x}U^{m-1}\rangle_2\\&\quad-a\tau U_{N-1}^{m+1}U_N^m+a\tau U_{N-1}^mU_N^{m-1}\\&=\|U^{m+1}\|_2^2-\|U^{m-1}\|_2^2-\langle U^{m+1},U^{m+1}-U^{m-1}\rangle_2+\langle U^m,U^m-U^{m-2}\rangle_2\\&\quad-a\tau U_{N-1}^{m+1}U_N^m+a\tau U_{N-1}^mU_N^{m-1}\\&=\langle U^{m+1}-U^{m-1},U^{m-1}\rangle+\langle U^m,U^m-U^{m-2}\rangle-a\tau U_{N-1}^{m+1}U_N^m+a\tau U_{N-1}^mU_N^{m-1}\\&=-2\nu\langle\Delta_{0x}U^m,U^{m-1}\rangle-2\nu\langle\Delta_{0x}U^{m-1},U^m\rangle_2-a\tau U_{N-1}^{m+1}U_N^m+a\tau U_{N-1}^mU_N^{m-1}\\&=-h\nu\left(U_N^{m-1}U_{N-1}^m+U_N^mU_{N-1}^{m-1}-U_0^mU_1^{m-1}-U_1^mU_0^{m-1}\right)-a\tau U_{N-1}^{m+1}U_N^m+a\tau U_{N-1}^mU_N^{m-1}\\&=a\tau\left(-U_N^m(U_{N-1}^{m-1}+U_{N-1}^{m+1})\right)+a\tau(U_0^mU_1^{m-1}+U_1^mU_0^{m-1})\\&=-2a\tau(U_N^m)^2+a\tau(U_0^mU_1^{m-1}+U_1^mU_0^{m-1})\end{aligned}$$

为了使得第二项 $a\tau(U_0^mU_1^{m-1}+U_1^mU_0^{m-1})=0$ 应该还需要左边有边界条件 $U_0=0$. 如此则有 $S^{m+1}-S^m\le0$.

由

$$2\nu\langle U^{m+1}, \Delta_{0x}U^m\rangle - h\nu U_{N-1}^{m+1}U_N^m = h\nu\left(\sum_{j=1}^{N-1} U_j^{m+1}(U_{j+1}^m - U_{j-1}^m) - U_{N-1}^{m+1}U_N^m\right)$$

$$\leq \nu(\|U^m\|_2^2 + \|U^{m+1}\|_2^2)$$

(注意这里范数是只计算$j = 1, \cdots N-1$, 左边值为 0 的条件也要用到)

因此当 $\nu < 1$ 时, 有 $(1-\nu)\|U^m\|_E^2 \leq S^m \leq (1+\nu)\|U^m\|_E^2$. 因此

$$\|U^{m+1}\|_E^2 \leq \frac{1}{1-\nu}S^{m+1} \leq \frac{1}{1-\nu}S^1 \leq \frac{1+\nu}{1-\nu}\|U^1\|_E^2.$$