第五次作业参考答案

韩如冰*

- 习题五 T2: 因为

$$J(u+\epsilon v)-J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega \epsilon\nabla u\cdot\nabla v+\epsilon^2|\nabla v|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega \epsilon f v\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}\epsilon g v\mathrm{d}s$$

可得 G-微分

$$DJ(u;v)=\lim_{t\to 0}\frac{J(u+\epsilon v)-J(u)}{\epsilon}=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x-\int_\Omega f v\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}g v\mathrm{d}s$$

验证 $J'(u):v\mapsto DJ(u;v)$ 是有界线性的. 注意这里的映射是 $J:C^1(\overline{\Omega})\to\mathbb{R}$. 有界性要求

$$|DJ(u;v)|\le C(u)\|v\|_{C^1(\Omega)}.$$

- 习题五 T7: 取检验函数 $v\in\mathbb{V}:=\{v\in H^1(0,1)|v(0)=0\}$. 方程左端乘以 v 分部积分可得:

$$\int_0^1 -u''v+uv\mathrm{d}x=\int_0^1 u'v'+uv\mathrm{d}x-u'(1)v(1)=\int_0^1 u'v'+uv\mathrm{d}x+u(1)v(1)-gv(1)$$

因此得变分形式:

$$a(u,v):=\int_0^1 u'v'+uv\mathrm{d}x+u(1)v(1)=\int_0^1 fv\mathrm{d}x+gv(1).$$

弱解 $u\in\mathbb{V}$, 满足对于任意 $v\in\mathbb{V}$ 上述变分形式都成立.

$\mathbb{V}$ 作为 $H^1(0,1)$ 的子空间，上面赋有 $\|\cdot\|_{H^1}$ 范数. 注意到由嵌入定理

$$u(1)v(1)\le\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{L^\infty}\le C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1},$$

注意也可以应用定理 5.6(迹定理) 直接可得

$$|u(1)v(1)|\le C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

因此有界性成立: $a(u,v)\le C\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$.

强制性: $a(u,u)\ge\int_0^1|u'|^2+|u|^2\mathrm{d}x=\|u\|_{H^1}^2$.

由 Lax-Milgram 引理其弱解存在唯一.

*School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, China

- 习题五 T8: 考虑 $\mathbb{V} := H^1(\Omega)$, 方程两端乘以 $v \in \mathbb{V}$ 可得

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} v \mathrm{d}s = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} (bu - g) v \mathrm{d}s = \int_\Omega f v \mathrm{d}x$$

因此定义弱解 $u \in \mathbb{V}$ 使得对于任意 $v \in \mathbb{V}$ 满足如下变分问题:

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} buv \mathrm{d}s = \int_\Omega f v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} gv \mathrm{d}s.$$

有界性:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} buv \mathrm{d}x &\le \|b\|_{C(\partial\Omega)} \int_{\partial\Omega} uv \mathrm{d}s \le \|b\|_{C(\partial\Omega)} \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ &\le C\|b\|_{C(\partial\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

最后一个不等式用了定理 5.6（迹定理）.

强制性: 由 $b \ge \delta$ 可知

$$a(u, u) \ge \min\{\delta, 1\} \|u\|_{H^1}^2.$$

由 Lax-Milgram 引理知弱解存在唯一.

- 习题六 T2: 注意到 $\mathbb{V}_h(0) \subset \mathbb{H}_0^1(\Omega)$. 双线性型 $a(\cdot, \cdot)$ 在 $\mathbb{V}_h(0) \times \mathbb{V}_h(0)$ 上仍然满足强制性有界性, 由 Lax-Milgram 引理可知该问题解存在唯一.

- 习题六 T5: 注意到 p211 页 $k_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i)$ 以及 $a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u)^T A \nabla v$, 因此由

$$\boldsymbol{K}^e = \int_{T^e} \nabla \lambda^e A (\nabla \lambda^e)^T$$

易得与 p213 页类似的单元刚度矩阵公式

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{1}{2 \det A_e} \begin{pmatrix} x_2^2 - x_2^3 & x_1^3 - x_1^2 \\ x_2^3 - x_2^1 & x_1^1 - x_1^3 \\ x_2^1 - x_2^2 & x_1^2 - x_1^1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_2^2 - x_2^3 & x_2^3 - x_2^1 & x_2^1 - x_2^2 \\ x_1^3 - x_1^2 & x_1^1 - x_1^3 & x_1^2 - x_1^1 \end{pmatrix},$$

其中 $A = (a_{ij})$.

- 习题六 T13: 将 $[0, 1]$ 区间用 $x_0, \cdots, x_N$ 分成 N 段. 考虑 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的基函数空间 $\mathbb{P}_3([x_i, x_{i+1}])$, 四个自由度分别为 $v(x_i), v'(x_i), v(x_{i+1}), v'(x_{i+1})$. 记为 $\{\varphi_i\}_i^4$. 去寻找 $\{p_i\}_{i=1}^4 \in \mathbb{P}_3([x_i, x_{i+1}])$ 使得 $\varphi_i(p_j) = \delta_{ij}$. 由仿射变换，我们这里只考虑 $[0, 1]$ 区间上的基函数

$$\begin{aligned}p_1 &= -x^2(1 - x); \\ p_2 &= -(1 - x)^2 x; \\ p_3 &= x^2(3 - 2x); \\ p_4 &= (1 - x)^2(3 - 2(1 - x)).\end{aligned}$$

- 习题六 T20: 见习题五 T7, 若有限元空间 $\mathbb{V}_h \subset \mathbb{V} = \{v \in H^1 | v(0) = 0\}$, 有限元解的存在唯一性由 Lax-Milgram 引理可得. 构造分片线性连续 Lagrange 元空间，并且满足左端点为零的边界条件:

$$\mathbb{V}_h = \{v \in C([0, 1]) \mid v|_K \in \mathbb{P}_1(K), v(0) = 0\}.$$