微分方程数值解上机作业1

Due Date: 11-6, 在教学网上提交.

2022 年 10 月 26 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1、考虑单位圆盘 $B=\{(x,y),x^2+y^2<1\}$ 上的 Poisson 方程,

$$-\Delta u=1,\quad (x,y)\in B.$$

和边值条件

$$u(x,y)=0,\quad (x,y)\in \partial B.$$

（1）将方程写成极坐标的形式，额外补充圆心处的有界性条件

$$\lim_{r\to 0+} u_r=0.$$

注意到解其实是关于半径 r 的一元函数。对这个一维问题，适当的设计有限差分格式，包括对方程的离散和对边界条件的处理。(在 $r=0$ 附近使用半整点技巧。)

（2）求解这个Poisson方程得到真解（这其实是一个一维的常微分方程）。取格点数 $N_r=8,16$ 时，计算数值解，将真解和数值解画在一个图里作比较。

2、考虑扩散方程的初边值问题

$$u_t=u_{xx},\quad x\in(0,1),t>0$$

$$u(x,0)=\frac{x^2}{2},\quad x\in[0,1]$$

$$u(0,t)=0,\quad u_x(1,t)=1,\quad t>0.$$

（1）固定网格比 $\mu=0.25$，取 $\Delta x=1/4,1/8,1/16,1/32$, 用显格式求解该问题至 $T=1$，并用外推法做后验误差估计，在 L^2 和 L^∞ 的意义下，分别得到收敛阶。

（2）用Crank-Nicolson格式求解该问题，使用足够细的网格计算至 $T=1,2,3,4$，画出这四个时刻的数值解的图像。将初值换成 $u(x,0)=x^2-x$，重复上述实验，你有什么观察？

3、考虑一阶波方程的初边值问题

$$u_t+u_x=0,\quad x\in(-1,5),t>0$$

$$u(x,0)=e^{-5(x-1)^2},\quad x\in[-1,5]$$

$$u(-1,t)=0,\quad t>0.$$

（1）用 upwind 方法求解该问题。固定网格比 $\nu=0.5$，取 $\Delta x=1/4,1/8,1/16,1/32$，分别求解至 $T=1$，并用外推法做后验误差估计，在 L^2 和 L^∞ 的意义下，分别得到收敛阶。

（2）用 upwind 方法求解该问题。固定 $\Delta x = 1/32$，取网格比 $\nu = 0.5, 1, 2$，分别求解至 $T = 1$，画出数值解的图像，你有什么观察？

（3）用Lax-Wendroff格式求解该问题，使用足够细的网格计算至 $T = 0.5, 1, 1.5, 2$，画出这四个时刻的数值解的图像。你在振幅、相位、最值等角度有什么观察？