微分方程数值解上机作业2

Due Date: 12-25, 在教学网上提交.

2022 年 11 月 23 日

鼓励相互讨论，但是请独立完成作业的写作。

1、考虑矩形区域 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ 上的 Poisson 方程,

$$-\Delta u = h, \quad (x,y) \in \Omega.$$

和边值条件

$$u = f, \quad (x,y) \in \partial\Omega_0;$$
$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g, \quad (x,y) \in \partial\Omega_1.$$

其中 $\partial\Omega_0 = \{0\} \times [0,1]$, $\partial\Omega_1 = \partial\Omega - \partial\Omega_0$.

（1）自选合理的 f，g，h 函数（h 和 f 至少有一个非零），写出该问题的两个变分形式。

（2）设单元直径为 $\frac{1}{3}$，做（大小相等的）三角形剖分，并画出草图。设计分片一次的 C^0 类有限元，并推导出有限元方程，并求解。

（3）设单元直径为 $\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{8}$，做（大小相等的）三角形剖分，并在单元直径为 $\frac{1}{4}$ 时画出草图。设计分片一次的 C^0 类有限元，并编程求解，并报告程序求解时间。将两个有限元解可视化。（例如再MATLAB中，使用 mesh、 surf 等命令）

（4）* 附加题：数院的同学推荐做，其他院系的同学量力而做。求出该问题的解析解（可能是级数的形式），并计算（3）中有限元解的误差。

2、考虑 L 区域 Ω 上的 Poisson 方程,

$$-\Delta u = 1, \quad (x,y) \in \Omega.$$

和边值条件

$$u = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega;$$

其中，Ω 为矩形 $(0,2) \times (0,2)$ 挖掉 $[1,2) \times [1,2)$ 的部分。

（1）做（大小相等的）三角形剖分，并在单元直径为 $\frac{1}{3}$ 时画出草图。设计分片一次的 C^0 类有限元，并编程求解，将有限元解可视化。

（2）把单元直径为 $\frac{1}{16}$ 时的有限解当作参考解，将单元直径为 $\frac{1}{2}$， $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$ 时的有限元解与参考解比较，计算 L^2 误差和 H^1 误差，报告收敛阶。