

2026 秋《高等代数》第一周作业

第一周作业（于 9 月 17 日周四习题课上交）

本周作业统一分为以下两部分：

书写部分：

1. 判断对错题目（主要回答对或错，如果不显然，赋予不超过 20 字的解释）
2. 计算题目
3. 证明题目
4. 推理挑错题目

使用 AI 的部分：

- 与 AI 的讨论题

判断对错题

1. 一个线性方程组的增广矩阵若化为阶梯形矩阵后出现一行

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \vdots & c \end{pmatrix}, \quad c \neq 0,$$

则原方程组无解。

2. 一个齐次线性方程组一定有解，但不一定只有零解。
3. 若一个线性方程组的未知量个数大于方程个数，则它一定有非零解。
4. 一个线性方程组若有两个不同的解，则它必有无穷多解。
5. 设 K 是一个数域， $a, b \in K$ 。若 $ab = 0$ ，则必有 $a = 0$ 或 $b = 0$ 。
6. 设 V 是 K^n 的子空间，且 $k \in K$ ， $\alpha \in V$ 。若 $k\alpha = 0$ ，则必有 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$ 。

7. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K^n$ 是 r 个向量 ($r \geq 1$), 则零向量可以被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表示。
8. 若一个向量 $\beta \in K^n$ 可以被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 则存在唯一的数 $c_1, \dots, c_r$ 使得 $\beta = c_1\alpha_1 + \dots + c_r\alpha_r$ 。
9. 若 β 可以被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表示, 且 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 都可以分别被 $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ 线性表示, 则 β 也可以被 $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ 线性表示。
10. 设 β 可以被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \gamma$ 线性表示, 那么 γ 也可以被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性表示。

计算题

1. 解下列线性方程组, 并按参数形式写出全部解 (《高等代数》第 25 页, 习题 1.1 第三题 (1)):

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

2. (《高等代数》第 29 页, 习题 1.2 第四题改编) 在 $\mathbb{R}^5$ 中的向量

$$\alpha_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2)^T, \quad \alpha_2 = (1 \ 0 \ 2 \ 3 \ 2)^T, \quad \alpha_3 = (1 \ 3 \ -1 \ 3 \ 2)^T$$

$$\alpha_4 = (1 \ -1 \ 1 \ 2 \ 1), \quad \beta = (-7 \ 8 \ 2a+2 \ -11 \ 2a)^T$$

讨论参数 $a \in \mathbb{R}$ 取何值时, β 可由 $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ 线性表示。若可以, 求出所有线性表示的方式。

3. (《高等代数学习指导书》第 23 页, 补充题一第 2 题) 解下述线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = b_1, \\ nx_1 + x_2 + 2x_3 + \dots + (n-2)x_{n-1} + (n-1)x_n = b_2, \\ \vdots \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \dots + nx_{n-1} + x_n = b_n. \end{cases}$$

4. (《高等代数学习指导书》第 23 页, 补充题一第 3 题) 解下述线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ x_2 + x_3 + \dots + x_{n+1} = 2, \\ \vdots \\ x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n} = n+1. \end{cases}$$

证明题

1. 我们知道可以通过基本行变换把增广矩阵化成阶梯形和最简阶梯形矩阵。那么得到的阶梯形矩阵和最简阶梯形矩阵是否依赖于基本行变换的次序呢？请证明。

(我更希望同学们自己给出证明，但如果你们和 AI 交互的话，它会首选用矩阵的方式给你解释，如果你不明白，你可以让它用更“手搓”的方式解释，但是你必须自己写证明。)

2. 设 V 是域 K 上的向量空间， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta \in V$ 。问：什么样的向量组满足如下条件？

对任意 $v \in V$ ， v 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性表示 $\iff v$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \beta$ 线性表示。

请给出充要条件，并证明你的结论。

推理挑错题

1. 某同学证明“设 $c_1, \dots, c_r \in K$ 是常数， $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K^n$ 是向量，如果向量 β 可以被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表示，则 β 可以被 $c_1\alpha_1, \dots, c_r\alpha_r$ 线性表示。”如下：

因为 β 可以被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表示，所以存在 $k_1, \dots, k_r \in K$ ，使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r.$$

由此立刻得到

$$\beta = \frac{k_1}{c_1}(c_1\alpha_1) + \frac{k_2}{c_2}(c_2\alpha_2) + \dots + \frac{k_r}{c_r}(c_r\alpha_r).$$

因此 β 可以被 $c_1\alpha_1, \dots, c_r\alpha_r$ 线性表示。

请指出证明中的错误，并写出正确的结论。

2. 某同学证明“若向量 β 可以被 $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ 线性表示，则它的表示法唯一。”如下：

设

$$\beta = k_1\alpha_1 + \dots + k_r\alpha_r = l_1\alpha_1 + \dots + l_r\alpha_r.$$

两式相减得

$$(k_1 - l_1)\alpha_1 + \dots + (k_r - l_r)\alpha_r = 0.$$

于是 $k_1 - l_1 = 0, \dots, k_r - l_r = 0$, 所以 $k_1 = l_1, \dots, k_r = l_r$, 故 β 的表示法唯一。

请指出证明中的错误, 并给出反例。

使用 AI 的部分

1. 任意线性方程组的增广矩阵都可以经过初等行变换化成如下阶梯形:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1,t_1} & c_{1,t_1+1} & \cdots & c_{1,t_2} & \cdots & c_{1,t_3} & \cdots & c_{1,t_r} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{2,t_2} & \cdots & c_{2,t_3} & \cdots & c_{2,t_r} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & c_{r,t_r} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中 $c_{i,t_i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$)。

如果经过行变换得到的阶梯形矩阵满足

$$t_1 = 1, \quad t_2 - t_1 > 1,$$

但 $c_{1,t_1+1} = 0$ 。这说明原来的线性方程组有什么特点?

(AI 的回答会立刻使用矩阵乘法和线性相关性, 你可以试着让它用更直接的方式解释。)

2. 我们知道可以通过如下三条初等变换将矩阵变换成阶梯形:

- (a) 交换矩阵的两行;
- (b) 某一行乘以非零常数;
- (c) 把某一行的 k 倍加到另一行上。

依次跟 AI 讨论如下问题:

- (1) 如果不允许用 (c), 但只允许 (c') 将第一行的 k 倍加到另一行上, 是否总可以将矩阵变为阶梯形? (AI 可能立刻能得到答案, 我建议先跟它讨论 3×3 的情况, 然后自己思考问题的重点是什么, 再提出自己的想法让 AI 验证。)
- (2) 如果允许用 (c), 但不允许用 (b), 是否总可以将矩阵变为阶梯形?
- (3) 如果只允许操作 (a) 和操作 (c'') 将第一行的 k 倍加到第二行上呢?

(4) 还有没有什么更小的操作方案集合保证生成所有的操作?

(建议跟 AI 讨论的时候先讲清楚, 你还没有接触初等行变换矩阵, 所以它的解释必须是根据我们学过的内容。)

自愿讨论的问题: 问 AI, 如何从更高的观点来理解这个问题 (群的概念和生成元)。