

2026 秋《高等代数》第二周作业

第二周作业（于 9 月 24 日周四习题课上交）

本周作业统一分为以下两部分：

书写部分：

1. 判断对错题目（主要回答对或错，如果不显然，赋予不超过 20 字的解释）
2. 计算题目
3. 证明题目
4. 推理挑错题目

使用 AI 的部分：

- 与 AI 的讨论题

判断对错题

1. 若向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性相关，任意一个向量可由其余向量线性表示。
2. 若向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关，则删去其中任意一个向量后所得向量组仍线性无关。
3. 若向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}$ 线性无关，则 $\vec{\beta}$ 不可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性表示。
4. 若 $\vec{\beta}$ 可由向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 唯一线性表示，则 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关。
5. 若向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 与 $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_t$ 等价，则 $r(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s) = r(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_t)$ 。
6. 若向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示，则 $r(I) \leq r(II)$ 。
7. 若向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关，则它的极大无关组只有它自身。

8. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 若 $r(A) = m$, 则 A 的行向量组线性无关。
9. 若两个向量组的秩相同, 则这两个向量组一定等价。
10. 向量 $\vec{\beta}$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性表示, 当且仅当向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}$ 线性相关。

计算题

1. (《高等代数》习题 3.3 第 2 题) 设向量组

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 27 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix},$$

求 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组, 以及它的秩。

2. (《高等代数学习指导书》习题 3.2 第 11 题) 当 a 取何值时, 下述向量组线性相关?

$$\vec{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

证明题

1. 设 $\vec{\beta}$ 可由向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性表示。证明: $\vec{\beta}$ 的表示方式唯一, 当且仅当向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性无关。
2. (《高等代数》习题 3.3 第 3 题) 证明: 秩为 r 的向量组中, 任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大无关组。
3. (《高等代数》习题 3.3 第 9 题) 证明:

$$r(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_r) \leq r(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s) + r(\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \dots, \vec{\beta}_r).$$

4. (《高等代数学习指导书》113 页习题 3.5 第 13 题) 设 A 是 $s \times n$ 矩阵, B 是 $l \times m$ 矩阵, C 是 $s \times m$ 矩阵, 证明:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

推理挑错题

1. 某同学证明“若向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}$ 线性相关, 则 $\vec{\beta}$ 可由 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s$ 线性表示”如下:

因为 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_s, \vec{\beta}$ 线性相关, 所以

$$k_1 \vec{\alpha}_1 + k_2 \vec{\alpha}_2 + \dots + k_s \vec{\alpha}_s + k \vec{\beta} = 0$$

对某组不全为零的系数成立。于是

$$\vec{\beta} = -\frac{k_1}{k} \vec{\alpha}_1 - \dots - \frac{k_s}{k} \vec{\alpha}_s.$$

请指出证明中的错误, 并说明还需要补充什么条件结论才成立。

2. 有个同学希望证明: 如果一个矩阵前 r 个行向量是极大无关组, 那么前 r 个列向量也是极大无关组。他的思路大致如下:

先对矩阵作初等行变换和初等列变换, 把它化为

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

在这个标准形里, 前 r 个行向量显然是极大无关组, 前 r 个列向量也显然是极大无关组。

因此对原矩阵来说, 只要前 r 个行向量是极大无关组, 前 r 个列向量也一定是极大无关组。

请指出这段证明中的错误, 并说明问题出在哪里。

使用 AI 的部分

1. 请和 AI 讨论“为什么矩阵的行秩等于列秩”这一结论。要求 AI 不要只给结论, 而要分成两步解释: 第一步, 为什么初等行变换不改变行秩; 第二步, 为什么初等行变换也不改变列秩。你需要整理出一份自己的提纲, 并指出其中你觉得最关键的一步在哪里。

初等行变换不改变行秩有种“比较两组向量组生成情况”的感觉; 而初等行变换不改变列秩在“比较两组向量组线性关系”的感觉。

与 AI 讨论为什么“矩阵的秩表示系统的有效独立信息数”。

2. 请你先自己判断，再和 AI 讨论：为什么用矩阵的列向量去求一个向量组的极大无关组时，只做初等行变换就可以，而不能随便做初等列变换？列变换不是不改变矩阵的秩吗？做了列变换以后会丢失什么样的信息？为什么会改变原变量的物理含义。
3. 第二讲把数域定义为 $\mathbb{C}$ 的、对加、减、乘、除封闭的子集。因此，一旦对象被放进 $\mathbb{C}$ 里，乘法的交换律和结合律就自动成立。本题希望你和 AI 讨论：如果不再要求所讨论的对象是 $\mathbb{C}$ 的子集，而始终要求它是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，并逐步去掉乘法的某些条件，还能得到什么样的“数”。请与 AI 多轮讨论，不要让它一次把后面所有对象都写出来。

讨论时请事先约定：

- 始终要求所讨论的对象是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间；
- 希望在这个线性空间上还能定义两个向量的乘法，使得加法和乘法尽可能接近数域；
- 只使用第二讲已经出现的语言，例如数域、线性空间、加法结合律与交换律、数乘、分配律、零元与单位元；
- 如果 AI 使用了环、代数、可除代数、模等尚未学习的术语，请它先解释这些词的意思，再改用“ $\mathbb{R}$ 上的线性空间，再加上两个向量的乘法”来重述。

请依次讨论下面几个问题。

- 1.) 先从已经熟悉的例子开始。 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 都是数域。把复数 $a + bi$ 看成 $\mathbb{R}^2$ 中的向量 (a, b) ，则 $\mathbb{C}$ 本身就是 $\mathbb{R}$ 上的 2 维线性空间。请 AI 用坐标写出两个复数的乘法，并核验：这个乘法满足交换律、结合律，有单位元 1，并且每个非零元都有乘法逆。这一问的目的是看清：所谓“复数乘法”，其实就是在 $\mathbb{R}$ 上的一个 2 维线性空间里规定了两个向量如何相乘。
- 2.) 现在请向 AI 提出如下问题：能否找到一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 V ，维数大于 2，并在 V 上规定一个乘法，使得
 - a.) 加法就是线性空间里的向量加法；
 - b.) 乘法对加法满足分配律；
 - c.) 存在乘法单位元；
 - d.) 每个非零向量都有乘法逆；
 - e.) 但不要求乘法满足交换律，即不要求对任意 $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in V$ 都有 $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\beta}\vec{\alpha}$ 。

请先不要让 AI 谈更一般的抽象结构，而要求它给出一个具体的、维数尽量小的例子，并用一组基把乘法完全写出来。这时 AI 通常会给出哈密顿四元

数。请你把乘法规则记下来，并自己检查：它为什么不再满足乘法交换律，但又为什么每个非零元仍然有逆。

- 3.) 在上一问的基础上继续追问：如果连乘法结合律也不再完全要求，但仍希望得到的对象是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，并且尽量保留“非零元有逆、乘法对加法分配”这些接近数域的性质，那么还能不能做出维数更大的例子？请让 AI 先只回答“有没有 8 维的例子”，再请它写出这个对象的名称和一组基。这时通常会得到八元数。请你继续追问：八元数的乘法还保留哪些性质，结合律具体在什么地方失败？可以请 AI 给出三个基向量，使得

$$(\vec{\alpha}\vec{\beta})\vec{\gamma} \neq \vec{\alpha}(\vec{\beta}\vec{\gamma}).$$

- 4.) 最后请你自己总结，并请 AI 帮你核对：从数域出发，始终要求是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，先去掉乘法交换律，再在一定程度上去掉结合律，依次得到了哪些对象、维数分别是多少。如果 AI 开始比较这些对象与数域的差别，请它明确指出：哪些是第二讲里数域已经具备的性质，哪些是后来被丢掉的性质。

请把与 AI 的讨论整理成一份自己的笔记，特别记下四元数和八元数的乘法各丢掉了哪一条运算律。

(这是数学研究的某种规律，就是有点时候会放松一些条件还可以得到“不错的”代数结构。)

4. 下面这个问题，不要让 AI 一次给出解答，希望同学们可以和 AI 多轮交互，先问 AI 有什么样的思路。设向量组 $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \dots, \vec{\alpha}_n$ 的秩为 $r \geq 1$ 。已知这个向量组的每一个极大无关组都恰好含有 r 个向量。

我们把每一个极大无关组看成一个“状态”，并据此作一个无向图 G ：

- 图 G 的每个顶点对应一个极大无关组；
- 如果两个极大无关组恰好有 $r - 1$ 个向量相同，也就是说它们只差一个向量，那么就在这两个顶点之间连一条边。

请你和 AI 一起分步思考下面的问题：

- 任选两个极大无关组 A 和 B ，你能否把问题转化为：“怎样从 A 出发，一步一步变到 B ，并且每一步都只替换掉一个向量”？
- 如果 $A \neq B$ ，那么 B 中一定存在某个向量不在 A 中。试思考：能否把这个新向量加入 A ，同时从 A 中删去一个合适的旧向量，使得到的新集合仍然是极大无关组？
- 若这种替换总能做到，那么每做一次替换，新得到的极大无关组与目标极大无关组 B 的“公共向量个数”会发生什么变化？

(d) 根据上面的观察，猜想图 G 是否连通，并给出证明。